LABORATORIO DI MATEMATICA

Dall'Algebra all'Analisi Matematica (di Emilio Ambrisi)

L'ontogenesi ricapitola la filogenesi (E. Haeckel, 1866)
L'atteggiamento matematico dal 1650 al 1750 circa

Le limitazioni delle sistemazioni didattiche. Esempi: sistemi di numerazione, angoli di un poligono, divisione dei polinomi, integrali definiti, ecc…

Esercizio di riscaldamento:
Qual è il resto della divisione di $x^3+x^5+x^7+x^{11}+x^{13}+x^{17}+x^{19}$ per x^2-1?

L'algoritmo della divisione tra due polinomi A e B (B≠0), di gradi rispettivi n e m, impariamo, solitamente, ad applicarlo quando $n \geq m$ e i polinomi sono ordinati secondo le potenze decrescenti della x. Applichiamolo al caso in cui è A=1 e B=1+x; è, cioè, $n<m$ e i polinomi sono ordinanti secondo le potenze crescenti.

1	1+x
-1-x	1-x+x²
// -x	
+x+x²	
// x²	

Siano $A=a_0+a_1x+\cdots..a_nx^n$ e B= $b_0+b_1x+\cdots..b_nx^m$ due polinomi con $b_0\neq 0$. Per ogni $k\in N$ fissato esistono dei polinomi Q ed R, determinati in modo unico, tali che $A=BQ+x^{k+1}R$ e $grado\ Q\leq k$. [vedi ANTOLOGIA, Geymonat]

Risultato: $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots$ (1)

E' un polinomio? Si perde la struttura di anello? C'è analogia con le progressioni?

Mettiamoci in una situazione d'origine. Nella situazione, cioè, dei matematici che cominciavano ad avere a che fare con oggetti – *le serie* - che ancora per molto tempo appariranno come a N.H. Abel (1802-1829), *strumenti del diavolo*.

Se avessimo diviso $1-x^{n+1}$ per $1-x$, quale sarebbe stato il risultato?

Per $|x|<1$

$$\frac{1}{1-x}\approx 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n$$

Possiamo provare ad ottenere nuovi sviluppi. Provare cambiando nella (1) x in $-x$ o in x^2 o in x^3 o eseguendo nuove divisioni di 1 per $1-x$, 1+x^2, 1+ x^3,$(1-x)^2$, ….

Possiamo fare laboratorio matematico, sperimentando! Tanto in matematica gli esperimenti costano veramente poco e tutti possono permetterseli. Possiamo fare matematica ripercorrendo la via genetica. Possiamo provare ad investigare che succede per particolari valori assegnati a x?

Se x=1, è: $\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots$? Che se ne pensava? E se $x = -1$ o -2 o ecc…?
Ancora i lavori di Eulero (1707-1783) sono pieni di "ragionamenti" sui risultati ottenuti anche con arrangiamenti diversi dell'espansione seriale. Ad esempio:

$$0 = (1-1) + (1-1) + \cdots \ldots \text{ oppure } 1 = 1 - (1-1) - (1-1) - \cdots \ldots .$$

Ecco allora anche qualche "grande" della matematica credere che lo sviluppo dovesse avere valore $\frac{1}{2}$ perchè valore mediano (un'anticipazione del criterio della media alla Cesaro?). Un altro esempio si ha con la considerazione di:

$ln2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \ldots\ldots\ldots$ che riordinando i termini si può scrivere:

$$ln2 = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} \ldots\ldots\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} \ldots\ldots\right) \text{ ovvero}$$

$$ln2 = \left\{\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} \ldots\ldots\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} \ldots\ldots\right)\right\} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} \ldots\ldots\right) =$$

$$\left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \ldots\ldots\right\} - \left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \ldots\ldots\right\} = 0$$

Fatto importante: alla (1) si giunge anche per altra via. Allo stesso risultato si arriva con un'attività che era, probabilmente, il divertimento dei matematici dell'epoca e anche di Newton il quale congetturò: *lo sviluppo*

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \cdots \ldots\ldots \quad (2)$$

è valido non solo per valori interi positivi dell'esponente m ma anche per valori fratti e negativi. In effetti, per qualsiasi valore numerico di m.

La sensazionale scoperta (1668) di Mercator della serie $\log(1+x) = -\sum_1^\infty (-x)^n/n$ apre prospettive nuove sulle applicazioni delle serie……………..(N. Bourbaki, 1960)

Applicate la congettura N per calcolare lo sviluppo di $(1+x)^m$ per $m = 1/2, -1, 1/3, 2/3, \ldots$

Con la congettura N si ottiene:

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5}{128}x^4 + \cdots \ldots\ldots$$

E' uno sviluppo valido? Newton "moltiplicò la serie per se stessa"; il risultato avrebbe dovuto essere $1 + x$. Controllate e controllate se è vero che:

$$(1+x)^{1/3}(1+x)^{2/3} = 1 + x$$

A che serve? L'integrazione termine a termine porta nuovi sviluppi [Vedi ANTOLOGIA, Agnesi]:

$$\frac{1}{1+x^2} \text{ è la derivata di } arctgx \text{ e } \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ lo è di } arcsenx$$

Di qui gli sviluppi in serie, le quadrature e le approssimazioni. Ad esempio:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \cdots.$$

Di qui anche la riduzione della trigonometria all'algebra mediante le uguaglianze

$$cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{e} \quad \text{sen}\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Definition

For any real number θ, $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

Vedi ANTOLOGIA

Come giustificare la (2)?:

$$1 + x = 1 + x$$
$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2$$
$$(1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$$

……………………………………………

Dal binomio di Newton alla serie binomiale sviluppando con la formula di Taylor [Vedi ANTOLOGIA]

Triangolo di Tartaglia e coefficienti binomiali. Combinazioni e permutazioni.

TRIANGOLO DI TARTAGLIA

riga	somme	
0	1	1
1	2	1 1
2	4	1 2 1
3	8	1 3 3 1
4	16	1 4 6 4 1
5	32	1 5 10 10 5 1
6	64	1 6 15 20 15 6 1
7	128	1 7 21 35 35 21 7 1
8	256	1 8 28 56 70 56 28 8 1
9	512	1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
10	1024	1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
11	2048	1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1
12	4096	1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1

Considerate le serie:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \ldots$$
$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots \ldots$$
$$1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \cdots \ldots$$
$$1 + 4x + 10x^2 + 20x^3 + \cdots \ldots$$

I coefficienti tracciano un viale del triangolo di Tartaglia. Conoscete la somma di una di queste serie? Potete trovare la somma delle altre? C'è una regolarità?

Ad esempio è vero che:

$$1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \cdots = (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)^3?$$

E che, in generale è:

$$\binom{m}{m} + \binom{m+1}{m}x + \binom{m+2}{m}x^2 + \cdots \ldots + \binom{m+k}{m}x^k + \cdots = (1 + x + x^2 + \cdots)^{m+1} = (1-x)^{-m+1} \ ?$$

ANTOLOGIA

Da: **Maria Gaetana Agnesi**, Instituzioni Analitiche ad uso della gioventù italiana, vol. II, 1749

INSTITUZIONI ANALITICHE

LIBRO TERZO

Del Calcolo Integrale.

IL Calcolo Integrale, che ſuole dirſi ancora calcolo ſommatorio, è un metodo di ridurre una quantità differenziale a quella quantità, di cui eſſa è la differenza, onde le operazioni del calcolo integrale ſono oppoſte a quelle del differenziale, e però ſi chiama ancora metodo inverſo delle fluſſioni, o ſia delle differenze. Per cagion d'eſempio il differenziale di x è dx, e per conſeguenza x è l'integrale di dx. Quindi ſarà ſegno ſicuro, che ſia giuſto quell'integrale, che differenziato reſtituirà la quantità propoſta da integrarſi. In due diverſe maniere ſi ricercano gl'integrali delle formole differenziali, in una per mezzo di eſpreſſioni finite algebraiche, o ridotte a quadrature ſuppoſte; nell'altra facendo uſo delle ſerie. Delle regole della prima maniera tratterò nel primo Capo; dell'altra nel ſecondo, a cui aggiungerò il terzo dell'uſo di eſſe regole per le retificazioni di curve, quadrature di ſpazj ec., e finalmente il quarto, che tratterà del Calcolo Eſponenziale.

C A P O II.

Delle Regole dell'Integrazioni facendo uſo delle Serie.

65. FAcendo ora paſſaggio all' altra maniera d'integrare nel principio indicata, cioè col mezzo delle ſerie, è neceſſario di premettere le ſeguenti Regole.

Regola I. Ridurre una frazione a ſerie infinita.

Si divida il numeratore per lo denominatore con la regola ordinaria della diviſione, ed il rimanente di nuovo ſi divida, e così di mano in mano in infinito, e ſi avrà una ſerie d'infiniti termini eguale alla propoſta frazione. Si avverta però di porre tanto nel numeratore, quanto nel denominatore della frazione propoſta per primo termine quello, che ſarà il maggiore. Con queſto modo operando averemo per tanto

$$\frac{f}{m+n} = \frac{f}{m} - \frac{fn}{mm} + \frac{fnn}{m^3} - \frac{fn^3}{m^4} + \frac{fn^4}{m^5} \text{ ec.}$$

$$\frac{f}{m-n} = \frac{f}{m} + \frac{fn}{mm} + \frac{fnn}{m^3} + \frac{fn^3}{m^4} + \frac{fn^4}{m^5} \text{ ec.}$$

$$\frac{af}{mm \pm nn} = \frac{af}{mm} \mp \frac{afnn}{m^4} + \frac{afn^4}{m^6} \mp \frac{afn^6}{m^8} + \frac{afn^8}{m^{10}} \text{ ec.}$$

cioè coi ſegni alternativi, quando il ſecondo termine

Da: **S.M. Nikolskij**, Corso di Analisi Matematica, vol.1, Edizioni Mir, 1985

Binomio di Newton. Consideriamo il polinomio dell'n-esimo grado

$$P(x) = (a + x)^n,$$

dove a è un numero arbitrario e n un numero naturale. La sua k-esima derivata vale

$$P^{(k)}(x) = n(n-1)\dots(n-k+1)(a+x)^{n-k},$$

da cui $P^{(k)}(0) = n(n-1)\dots(n-k+1)a^{n-k}$ e, di conseguenza, secondo la formula di Maclaurin per un polinomio dell'n-esimo grado avremo

$$(a+x)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2 + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}x^3 + \dots + \frac{n(n-1)\dots 2}{(n-1)!}ax^{n-1} + x^n. \qquad (6)$$

Questa uguaglianza è detta la *formula del binomio di Newton.*

Se introduciamo la notazione usuale

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}, \qquad C_n^n = C_n^0 = 1, \qquad (7)$$

la formula del binomio di Newton può essere scritta in modo più conciso:

$$(a+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k}x^k. \qquad (6')$$

I numeri C_n^k si chiamano *coefficienti binomiali.*

È da notare che moltiplicando per $(n-k)!$ il numeratore e il denominatore dell'espressione (7) si ottiene

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)(n-k)\dots 1}{k!(n-k)!},$$

ossia

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad (k = 0, 1, 2, \dots, n). \qquad (7')$$

Il caso $k = 0$ è incluso anch'esso in questa formula, perché $0! = 1$.

Un'altra proprietà importante dei coefficienti binomiali è espressa dall'uguaglianza

$$C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}.$$

Lasciamo al lettore di dimostrarla. Se si tiene conto che $C_n^0 = C_n^n = 1$, allora l'ultima uguaglianza consente di ottenere i numeri C_n^k per ogni n e k ricorrendo ogni volta alla sola operazione di somma.

Abbiamo dedotto precedentemente la formula di Taylor per i polinomi. Supponiamo ora che nell'intorno di un punto a sia assegnata la funzione f che non è un

Da: **Thomas/Finney**, Calculus, 1996

The Binomial Series for Powers and Roots

The Maclaurin series generated by $f(x) = (1+x)^m$, when m is constant, is

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \cdots$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)}{k!}x^k + \cdots. \qquad (1)$$

This series, called the **binomial series,** converges absolutely for $|x| < 1$. To derive the series, we first list the function and its derivatives:

$$\begin{aligned}
f(x) &= (1+x)^m \\
f'(x) &= m(1+x)^{m-1} \\
f''(x) &= m(m-1)(1+x)^{m-2} \\
f'''(x) &= m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3} \\
&\vdots \\
f^{(k)}(x) &= m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)(1+x)^{m-k}.
\end{aligned}$$

We then evaluate these at $x = 0$ and substitute into the Maclaurin series formula to obtain the series in (1).

If m is an integer greater than or equal to zero, the series stops after $(m+1)$ terms because the coefficients from $k = m+1$ on are zero.

If m is not a positive integer or zero, the series is infinite and converges for $|x| < 1$. To see why, let u_k be the term involving x^k. Then apply the Ratio Test for absolute convergence to see that

$$\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = \left|\frac{m-k}{k+1}x\right| \to |x| \qquad \text{as } k \to \infty.$$

Our derivation of the binomial series shows only that it is generated by $(1+x)^m$ and converges for $|x| < 1$. The derivation does not show that the series converges to $(1+x)^m$. It does, but we assume that part without proof.

For $-1 < x < 1$,

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{m}{k} x^k, \qquad (2)$$

where we define

$$\binom{m}{1} = m, \qquad \binom{m}{2} = \frac{m(m-1)}{2!},$$

and

$$\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)}{k!} \qquad \text{for } k \geq 3.$$

Euler's Formula

As you may recall, a complex number is a number of the form $a + bi$, where a and b are real numbers and $i = \sqrt{-1}$. If we substitute $x = i\theta$ (θ real) in the Maclaurin series for e^x and use the relations

$$i^2 = -1, \qquad i^3 = i^2 i = -i, \qquad i^4 = i^2 i^2 = 1, \qquad i^5 = i^4 i = i,$$

and so on, to simplify the result, we obtain

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + \frac{i\theta}{1!} + \frac{i^2\theta^2}{2!} + \frac{i^3\theta^3}{3!} + \frac{i^4\theta^4}{4!} + \frac{i^5\theta^5}{5!} + \frac{i^6\theta^6}{6!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots\right) = \cos\theta + i\sin\theta. \end{aligned}$$

This does not *prove* that $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ because we have not yet defined what it means to raise e to an imaginary power. But it does say how to define $e^{i\theta}$ to be consistent with other things we know.

Definition

For any real number θ, $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

Da: Giuseppe Geymonat, Lezioni di Matematica1, Levrotto&Bella, 1981

Pag. 223

1.6. *Divisione secondo le potenze crescenti.* Il seguente risultato sarà utile nel seguito.

Siano $A = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ *e* $B = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$ *due polinomi con* $b_0 \neq 0$. *Per ogni* $k \in \mathbf{N}$ *fissato esistono dei polinomi* Q *ed* R, *determinati in modo unico, tali che*

$$A = BQ + x^{k+1} R \qquad \text{grado } Q \leqslant k. \tag{1.21}$$

Si dice che Q è il *quoziente* ed $x^{k+1} R$ il *resto* della divisione secondo le potenze crescenti di A per B fino all'ordine k.

Unicità. Sia $A = BQ + x^{k+1} R = BQ_1 + x^{k+1} R_1$ con grado $Q \leqslant k$, grado $Q_1 \leqslant k$ e quindi grado $(Q - Q_1) \leqslant k$. Si ha allora

$$B(Q - Q_1) = x^{k+1}(R - R_1). \tag{1.22}$$

Se $Q - Q_1 \neq 0$ allora poiché grado $(Q - Q_1) \leqslant k$ risulta $Q - Q_1 = \beta_0 + \beta_1 x + \ldots + \beta_k x^k$ con uno almeno dei $\beta_i \neq 0$ e siccome $b_0 \neq 0$ il polinomio a primo membro di (1.22) ha un termine di grado $\leqslant k$ con coefficiente diverso da 0 mentre il polinomio a secondo membro è nullo ovvero ha solo termini di grado $\geqslant k + 1$. In entrambi i casi si ha un assurdo. Deve quindi essere $Q = Q_1$ e quindi $R = R_1$.

Esistenza. Siccome $b_0 \neq 0$ esistono λ_0 ed un polinomio R_1 tali che

$$A - \lambda_0 B = x R_1; \tag{1.23}$$

analogamente esistono λ_1 ed un polinomio R_2 tali che

$$R_1 - \lambda_1 B = x R_2$$

ed analogamente esistono λ_p ed un polinomio R_{p+1} tali che

$$R_p - \lambda_p B = x R_{p+1}. \tag{1.24}$$

Moltiplichiamo la (1.23) per 1, e (1.24) per x^p, $p = 1, \ldots, k$ e sommiamo; si ottiene

$$\begin{aligned} A - \lambda_0 B + x R_1 - \lambda_1 x B + \ldots + x^k R_k - \lambda_k x^k B = \\ = x R_1 + x^2 R^2 + \ldots + x^k R_k + x^{k+1} R_k. \end{aligned}$$

Ponendo allora $Q = \lambda_0 + \lambda_1 x + \ldots + \lambda_k x^k$ ed $R = R_{k+1}$ si ha l'asserto.

c.v.d.

Si osservi che il procedimento non cambia se $n \geqslant m$ oppure $n < m$.

Facciamo vedere su un esempio come si esegue praticamente l'operazione. Sia $A = 3x^6 + 4x^4 + x^2 + 5$, $B = x^3 + 2x^2 - x - 1$, $k = 5$. Risulta:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrl}
5+ & + & x^2+ & + & 4x^4+ & + & 3x^6 & & & \big| -1-x+2x^2+x^3 \\
\cline{10-10}
+5+ & 5x- & 10x^2- & 5x^3 & & & & & & -5+5x-16x^2+21x^3-52x^4+78x^5 \\
\cline{1-7}
 & -5x+ & 11x^2+ & 5x^3+ & 4x^4+ & + & 3x^6 & & & \\
 & -5x- & 5x^2+ & 10x^3+ & 5x^4 & & & & & \\
\cline{2-7}
 & & 16x^2- & 5x^3- & x^4+ & + & 3x^6 & & & \\
 & & 16x^2+ & 16x^3- & 32x^4- & 16x^5 & & & & \\
\cline{3-7}
 & & & -21x^3+ & 31x^4+ & 16x^5+ & 3x^6 & & & \\
 & & & -21x^3- & 21x^4+ & 42x^5+ & 21x^6 & & & \\
\cline{4-7}
 & & & & 52x^4- & 26x^5- & 18x^6 & & & \\
 & & & & 52x^4+ & 52x^5- & 104x^6- & 52x^7 & & \\
\cline{5-8}
 & & & & & -78x^5+ & 86x^6+ & 52x^7 & & \\
 & & & & & -78x^5- & 78x^6+ & 156x^7+ & 78x^8 & \\
\cline{6-9}
 & & & & & & +164x^6- & 104x^7- & 78x^8 &
\end{array}$$

Dunque $Q = -5 + 5x - 16x^2 + 21x^3 - 52x^4 + 78x^5$ ed $R = 164 - 104x - 78x^2$, risulta

$$\begin{aligned} 5 + x^2 + 4x^4 + 3x^6 = (-5 + 5x - 16x^2 + 21x^3 + 52x^4 + 78x^5)(-1 - x + 2x^2 + x^3) + \\ + x^6(164 - 104x - 78x^2). \end{aligned}$$

Si osservi che se si prendeva $k = 6$ bisognava ancora continuare di un passo la divisione.